TEMA 2: Números complejos

José L. Díaz

Matemáticas I

TEMA 2: Números complejos

- El origen de los números complejos surge de la necesidad de resolver ecuaciones de la forma $x^2 + 1 = 0$

- En 1637, **René Descartes** comentó el apéndice de su obra Discurso del método:

> *Ni las raíces verdaderas ni las falsas son siempre reales; a veces son* imaginarias; *es decir, mientras que uno puede imaginar tantas raíces de cada ecuación como grado haya asignado, no siempre hay una cantidad definida que corresponda a cada raíz imaginada.*

- Hasta la llegada de **Argand y Gauss** en el s.XVIII, los números complejos eran una mera idea abstracta. Gracias a estos matemáticos, se dotó a los números complejos de una idea geométrica. Veremos como los complejos pueden representarse en un plano coordenado

El conjunto de los números complejos se define como

$$\mathbb{C} = \{x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R}\},$$

donde i es la **unidad imaginaria** y verifica $i^2 = -1$. Si $z = x + iy$, diremos que x es la **parte real** de z, que denotaremos $x = \operatorname{Re} z$, y que y es la **parte imaginaria** de z, que denotaremos $y = \operatorname{Im} z$. Evidentemente, $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$. Los números reales son complejos con parte imaginaria 0, de modo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Los complejos con parte real 0 se denominan **imaginarios puros.** El único número real imaginario puro es el 0.

Dado un complejo, $z = x + iy$, se define su **conjugado** como $\overline{z} = x - iy$, y su **módulo** como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La **suma** de dos complejos se define como

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

y el **producto** como

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Nótese que el producto de un número complejo por su conjugado es

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Ejercicio 1. Determina los inversos de la suma $(-z)$ y del producto (z^{-1}). ¿Cómo definirías la división de números complejos $\frac{z_1}{z_2}$?

Propiedades importantes de la conjugación:

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \qquad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad \overline{(z^n)} = \overline{z}^n.$$

Propiedades importantes del valor absoluto y módulo:

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|, \qquad |\operatorname{Im} z| \le |z|, \qquad |\overline{z}| = |z|,$$

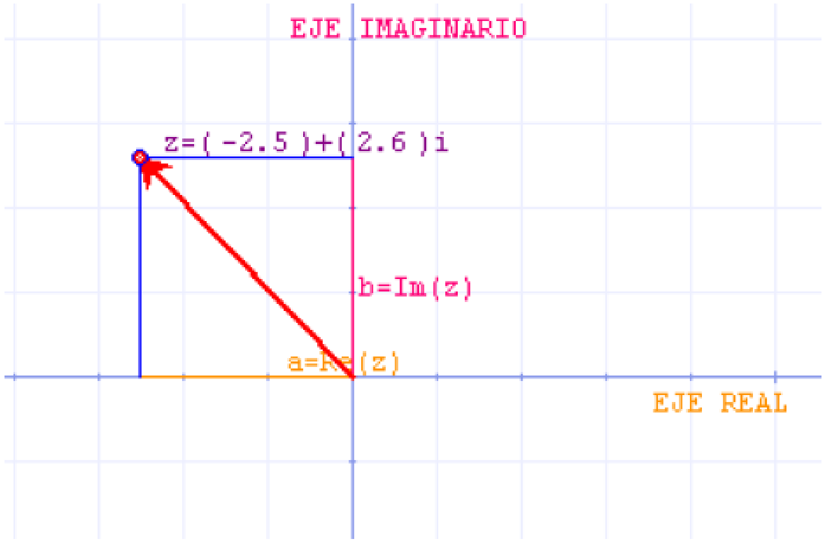
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

El número complejo $x + iy$ se puede identificar con el par ordenado (x, y), lo que permite representar $\mathbb{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$. El eje de las abscisas se denomina **eje real,** el de las ordenadas **eje imaginario** y el plano $\mathbb{R}^2$ se denomina **plano complejo.** Esta identificación permite representar $z = x + iy$ no sólo en coordenadas cartesianas, sino mediante sus coordenadas polares. Si la distancia del punto $(x, y) \neq (0, 0)$ al origen es r y el ángulo que forma el vector con el eje real es θ, el número complejo $z = x + iy$ tiene módulo $|z| = r$ y **argumento** $\arg z = \theta$. Módulo y argumento se obtienen de $z = x + iy$ mediante

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

y proporcionan la siguiente **representación polar** de z

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = re^{i\theta},$$



Representación polar. Operaciones elementales

Retomando el problema del producto de complejos, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Del mismo modo que el producto, el inverso de $z = re^{i\theta}$ será

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta},$$

y el conjugado

$$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}.$$

De nuevo la representación polar permite estudiar potencias y raíces de números complejos. La potencia se obtiene de una forma muy sencilla. Si $z = re^{i\theta}$ y $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta},$$

Las raíces de números complejos son más sutiles. Sea $z = re^{i\theta}$ y supongamos que queremos hallar la raíz n-ésima de z. Teniendo en cuenta que $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sqrt[n]{z} = \left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, según vamos dando valores a k, empezando por $k = 0$, obtenemos distintos argumentos para $\sqrt[n]{z}$ hasta que llegamos a $k = n - 1$.